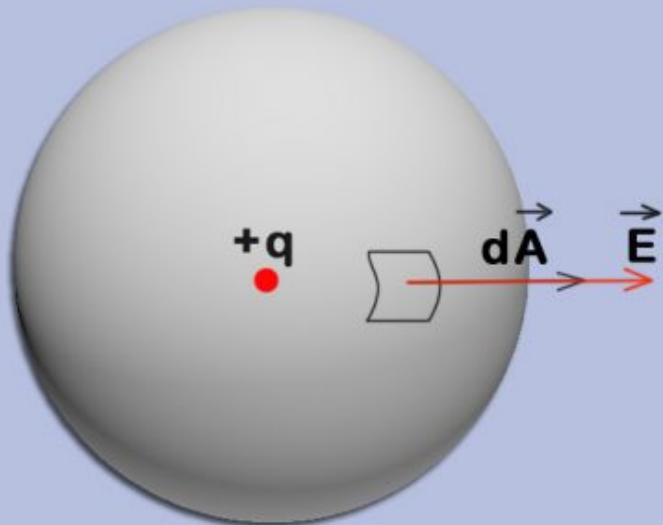


## فصل سوم: قانون گاوس

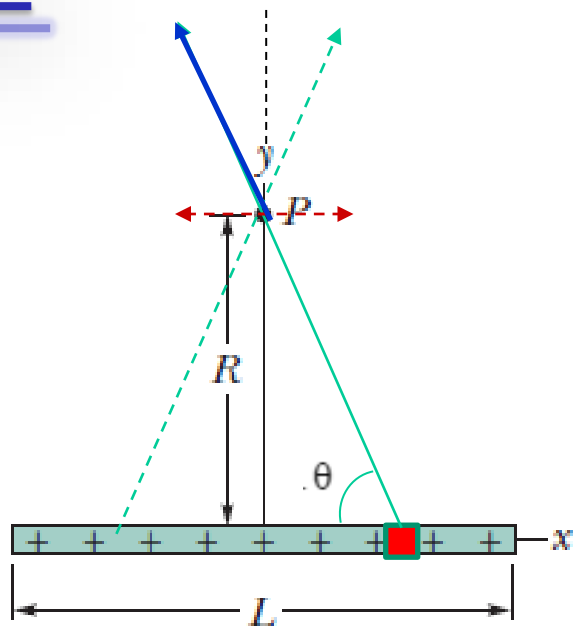


Carolus Fridericus Gauss

30 April 1777 – 23 February 1855



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$



$$\begin{aligned}
 |\vec{E}| &= 2 \int_0^{1/2} \left( \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) \sin \theta = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{1/2} \left( \frac{\lambda dx}{x^2 + R^2} \right) \left( \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) \\
 &= \frac{\lambda R}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{1/2} \frac{dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}
 \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = ?$$

$$x = R \tan \theta$$

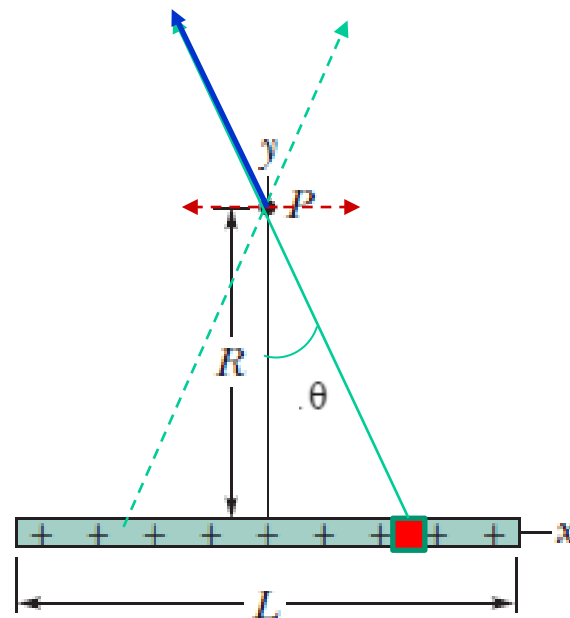
$$dx = \frac{R}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$R^2 + x^2 = R^2 + R^2 \tan^2 \theta$$

$$R^2 + x^2 = R^2(1 + \tan^2 \theta) = \frac{R^2}{\cos^2 \theta}$$

$$(R^2 + x^2)^{3/2} = \frac{R^3}{\cos^3 \theta}$$

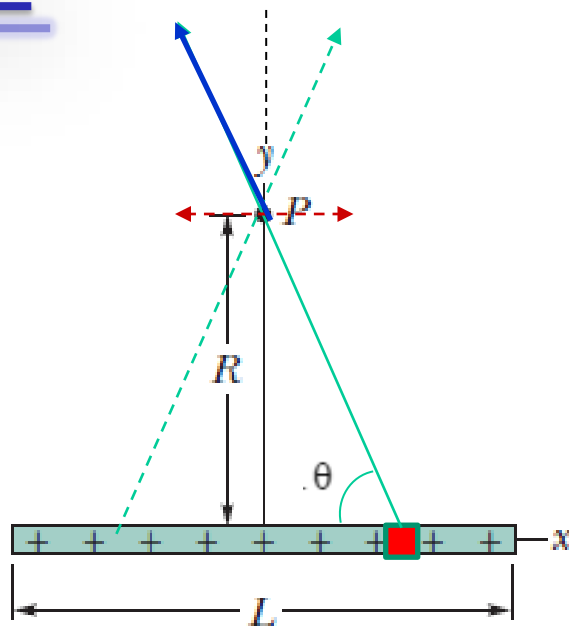
$$\int \frac{dx}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{R}{\cos^2 \theta} d\theta \times \frac{\cos^3 \theta}{R^3}$$



$$\int \frac{dx}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = \int d\theta \frac{\cos \theta}{R^2}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{R^2} \int d\theta \cos \theta$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{R^2} \sin \theta$$

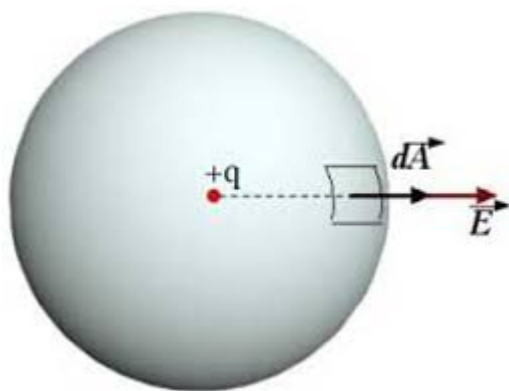


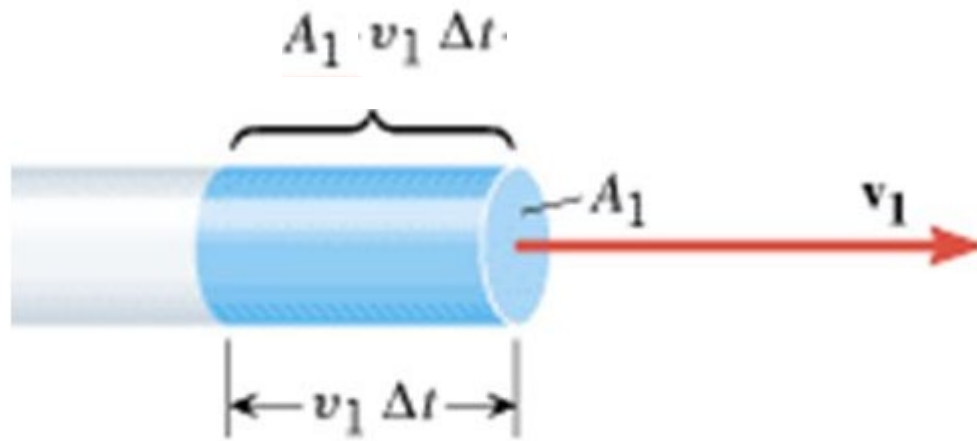
$$\begin{aligned}
 |\vec{E}| &= 2 \int_0^{1/2} \left( \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) \sin \theta = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{1/2} \left( \frac{\lambda dx}{x^2 + R^2} \right) \left( \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) \\
 &= \frac{\lambda R}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{1/2} \frac{dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \\
 &= \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L R} \frac{L/2}{\sqrt{(L/2)^2 + R^2}} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 R} \frac{1}{\sqrt{L^2 + 4R^2}}
 \end{aligned}$$

$L \rightarrow \infty$

$$\frac{q}{2\pi\epsilon_0 R L} \frac{1}{\sqrt{1 + 4R^2/L^2}} \longrightarrow \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$$

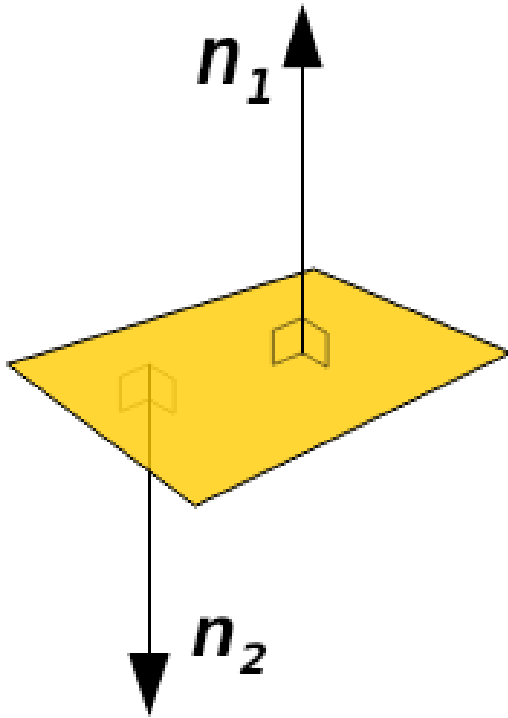
قانون گاوس میدانهای الکتریکی در نقطه‌های واقع  
بر سطح بسته گاوسی را به بار خالص محصور در  
آن سطح مربوط می‌کند.



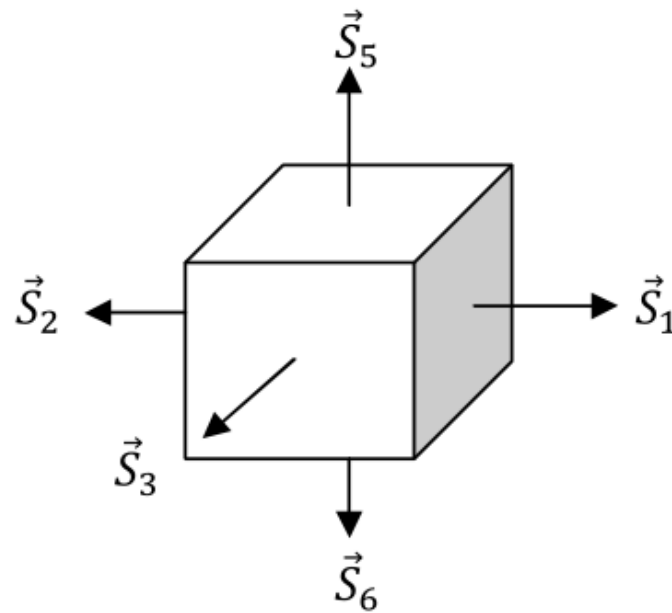


$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = Av$$

## بردار عمود بر سطح



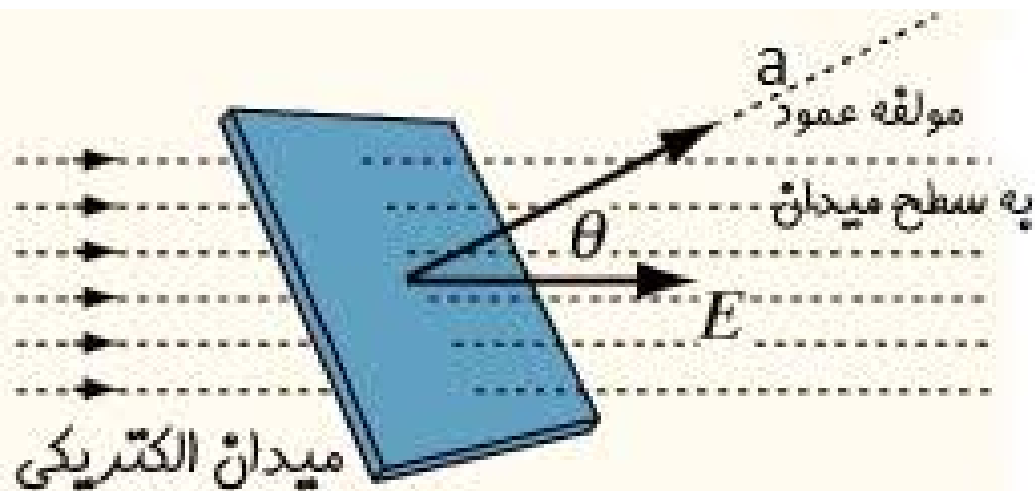
## بردار عمود بر سطح



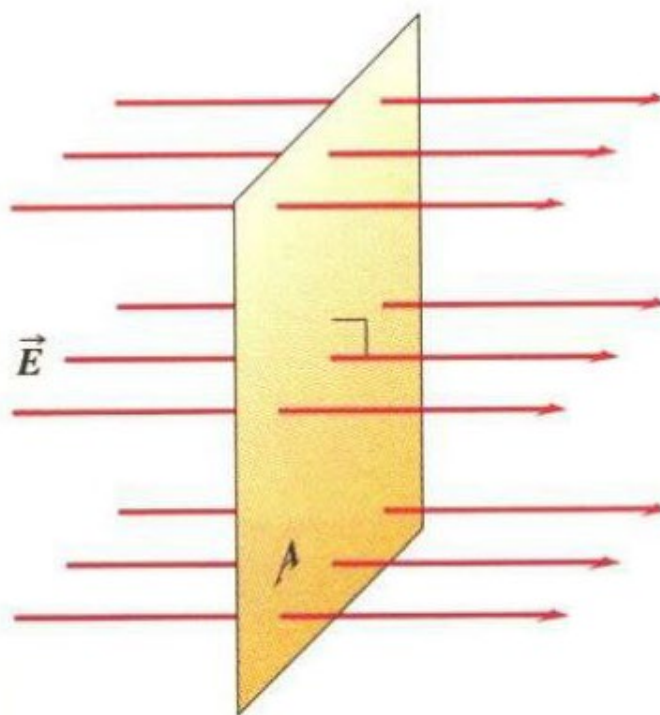


## شار الکتریکی

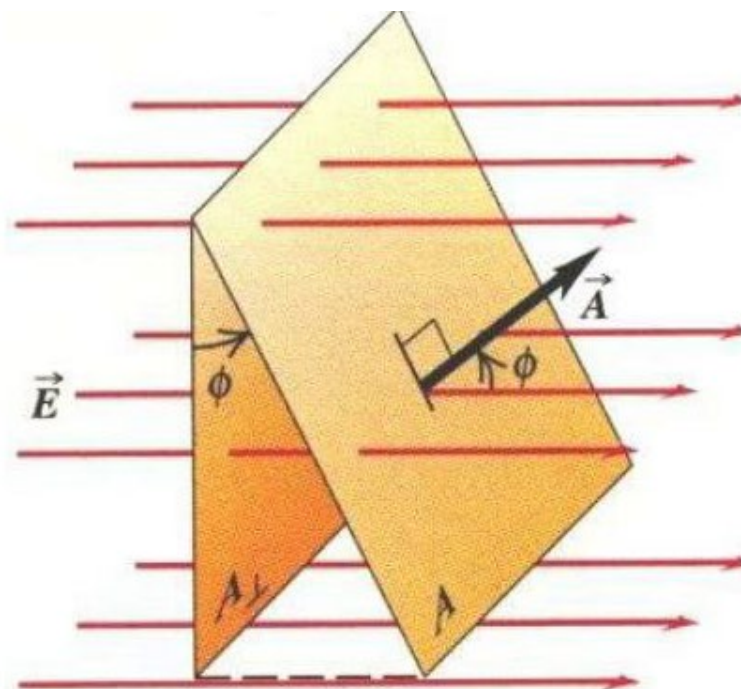
تعداد خطوط میدان گذرنده از سطح عمود بر خطوط میدان را  
شار میدان گویند



## شار الكتریکی



$$\Phi_E = EA$$

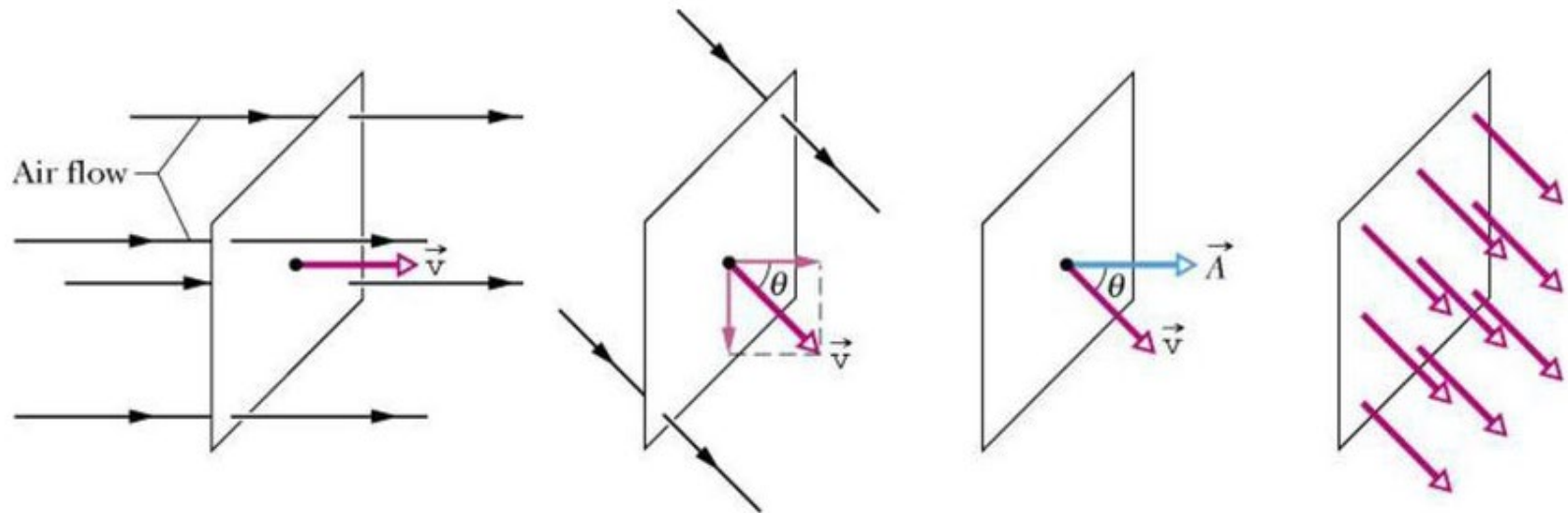


$$A_{\perp} = A \cos \phi \text{ so } \Phi_E = EA_{\perp} = EA \cos \phi$$

# شار الکتریکی

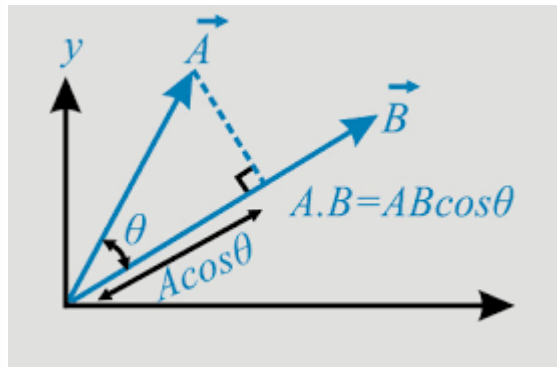
بردار واحد عمود بر سطح

$$\vec{A} = A \hat{\mathbf{r}}_N$$



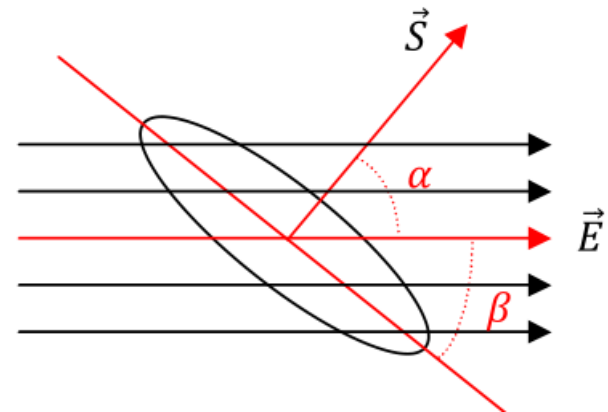
$$\Phi = (V \cos \theta) A = \vec{V} \cdot \vec{A}$$

# شار الکتریکی



تعداد خطوط میدان گذرنده از  
سطح در راستای خطوط میدان  
را شار میدان گویند

$$\phi = ES \cos \alpha$$



$$\alpha = 90 - \beta$$

تعداد خطوط میدان گذرنده از  
سطح عمود بر خطوط میدان  
را شار میدان گویند

$$\phi = \vec{E} \cdot \vec{S} \quad \left[ \frac{N.m^2}{C} \right]$$

## شار الکتریکی

$$\phi = \vec{E} \cdot \vec{S}$$

$$\phi = ES \cos \alpha$$

الف)  $\alpha = 0$  یا  $\beta = 90$  یعنی سطح عمود بر خطوط قرار دارد. داریم:

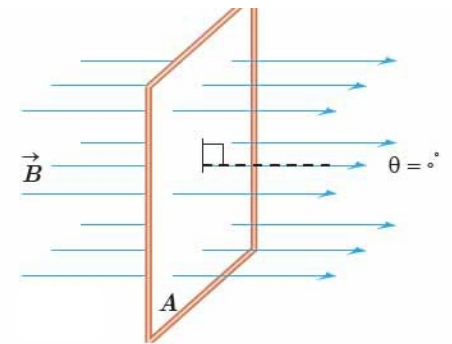
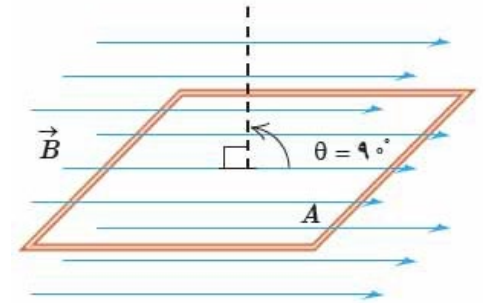
$$\phi_{max} = ES$$

ب)  $\alpha = 90$  یا  $\beta = 0$  یعنی سطح موازی با خطوط قرار دارد. داریم:

$$\phi = 0$$

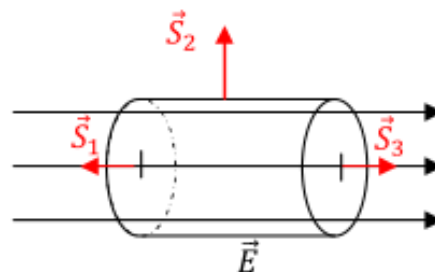
ج)  $\alpha = 180$  یا  $\beta = 90$  یعنی سطح عمود بر خطوط قرار دارد. داریم:

$$\phi = -ES$$



# شار الکتریکی

**مثال** استوانه ای بسته را داخل خطوط میدان یکنواخت قرار می دهیم شار عبوری از حجم بسته استوانه را محاسبه نمایید.



حل:

$$\phi = \vec{E} \cdot \vec{S}$$

$$\phi = ES \cos \alpha$$

$$\varphi_{\text{کل}} = \sum \varphi_i = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$$

$$\varphi_1 = E_1 S_1 \cos 180 = E(\pi r^2)(-1)$$

$$\varphi_2 = E_2 S_2 \cos 90 = 0$$

$$\varphi_3 = E_3 S_3 \cos 0 = E(\pi r^2) * 1$$

$$\varphi_{\text{کل}} = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = -E\pi r^2 + 0 + E\pi r^2$$

$$\varphi_{\text{کل}} = 0$$

اگر شار به حجم یا سطح بسته وارد شود با علامت منفی و اگر شار از آن یا سطح بسته خارج شود با علامت مثبت نشان داده می شود.

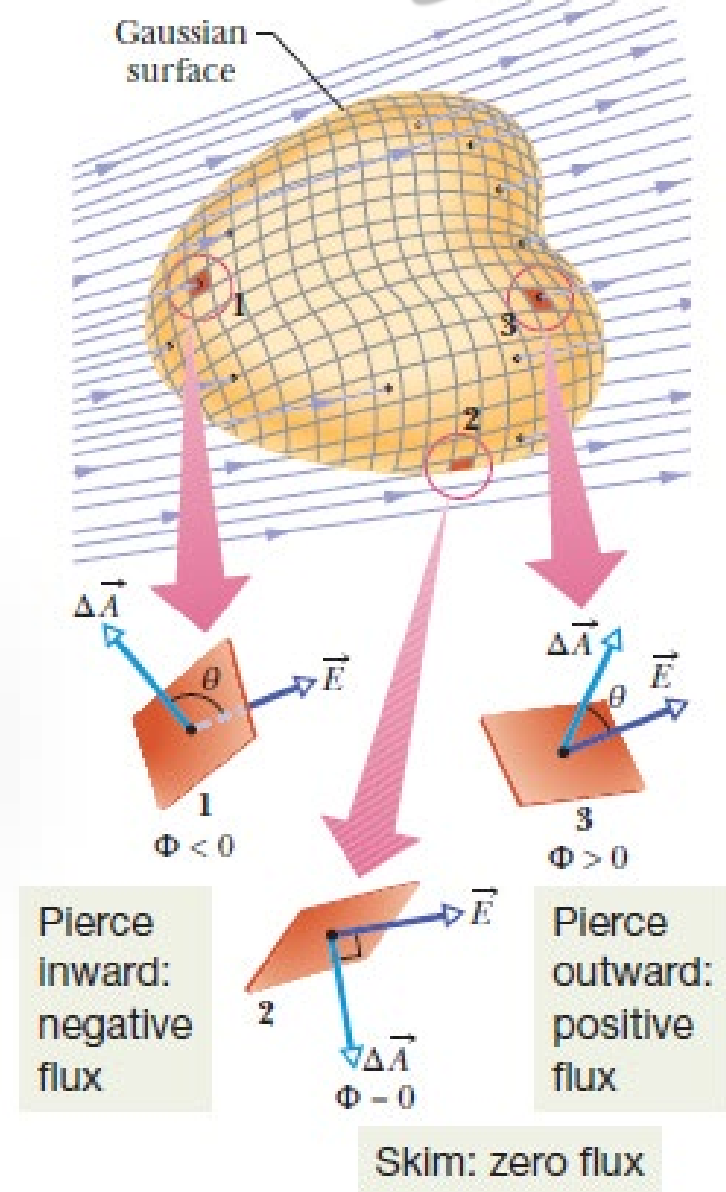
# شار الكترىكى

$$\Delta\Phi = (E \cos \theta) \Delta A.$$

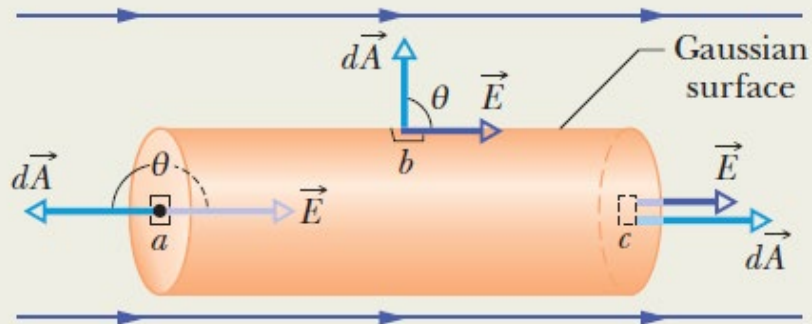
$$\Delta\Phi = \vec{E} \cdot \Delta\vec{A},$$

$$\Phi = \sum \vec{E} \cdot \Delta\vec{A}.$$

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad (\text{net flux}).$$



مثال



$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$$= \int_a \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_b \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_c \vec{E} \cdot d\vec{A}.$$

$$\int_a \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int E(\cos 180^\circ) dA = -E \int dA = -EA,$$

$$\int_b \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int E(\cos 90^\circ) dA = 0.$$

$$\int_c \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int E(\cos 0) dA = EA.$$



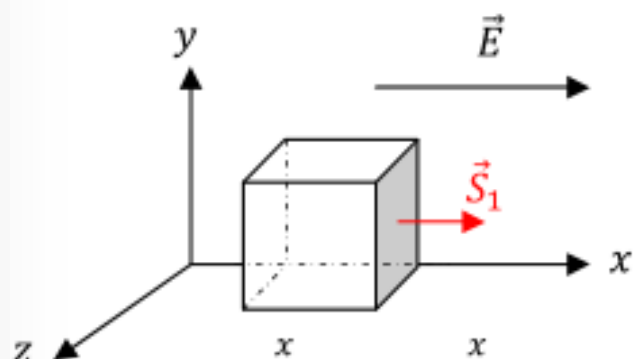
# شار الکتریکی

**مثال** شار عبوری از یک مکعب مربع به ضلع  $a = 10 \text{ cm}$  تحت میدان الکتریکی به صورت

$$\vec{E}(x) = b\sqrt{x} \hat{i} \quad , \quad \text{که در آن } b = 800 \frac{\text{N}}{\text{C.m}^{\frac{1}{2}}} \text{ است را مطابق شکل به دست آورید.}$$

حل: شار الکتریکی به غیر از صفحه اول و پشت آن، مابقی صفر می شوند. چرا؟ داریم:

$$\varphi_{\text{کل}} = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 + \varphi_6$$



$$\vec{E}(x) = b\sqrt{x} \hat{i} \Rightarrow \begin{cases} x = 2a \Rightarrow E_1 = b\sqrt{2a} \\ x = a \Rightarrow E_2 = b\sqrt{a} \end{cases}$$

$$\varphi_1 = E_1 S_1 \cos 0 = b\sqrt{2a} * a^2(1) = \sqrt{2} * ba^2\sqrt{a}$$

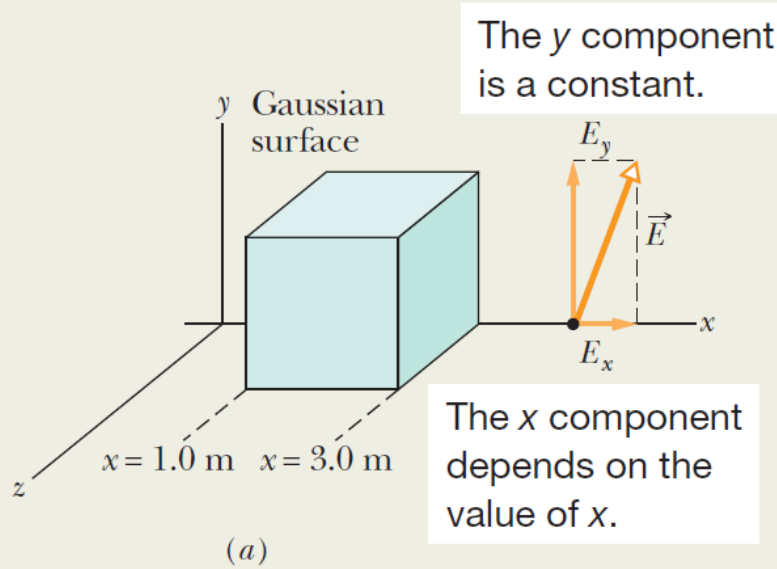
$$\varphi_2 = E_2 S_2 \cos 180 = b\sqrt{a} * a^2(-1) = -ba^2\sqrt{a}$$

$$\varphi_{\text{کل}} = \varphi_1 + \varphi_2 = ba^2\sqrt{a}(\sqrt{2} - 1)$$

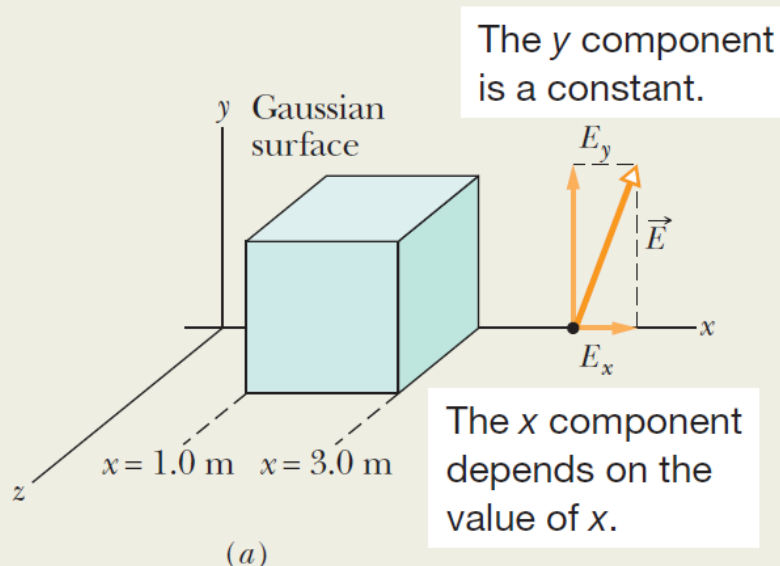
$$\varphi_{\text{کل}} = 800 * \sqrt{0.1} * 0.01(1.4 - 1)$$

$$\varphi_{\text{کل}} = 1.01 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}}$$

دیده می شود که شار از یک سطح بسته می تواند غیر صفر هم باشد.



$$\vec{E} = 3.0x\hat{i} + 4.0\hat{j}$$



$$\vec{E} = 3.0x\hat{i} + 4.0\hat{j}$$

$$\Phi_r = 3.0 \int (3.0) dA = 9.0 \int dA.$$

$$\Phi_r = (9.0 \text{ N/C})(4.0 \text{ m}^2) = 36 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}.$$

$$d\vec{A} = dA\hat{i}.$$

$$\Phi_r = \int \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int (3.0x\hat{i} + 4.0\hat{j}) \cdot (dA\hat{i})$$

$$= \int [(3.0x)(dA)\hat{i} \cdot \hat{i} + (4.0)(dA)\hat{j} \cdot \hat{i}]$$

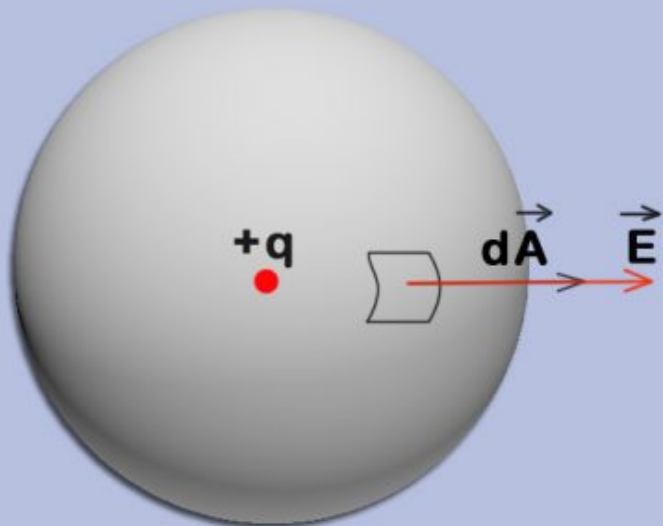
$$= \int (3.0x dA + 0) = 3.0 \int x dA.$$

# قانون گاوس

قانون گاوس شار خالص عبوری از یک سطح بسته را به بار خالص محصور در سطح مرتبط می‌کند.

$$\epsilon_0 \Phi = q_{\text{enc}} \quad (\text{Gauss' law}).$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

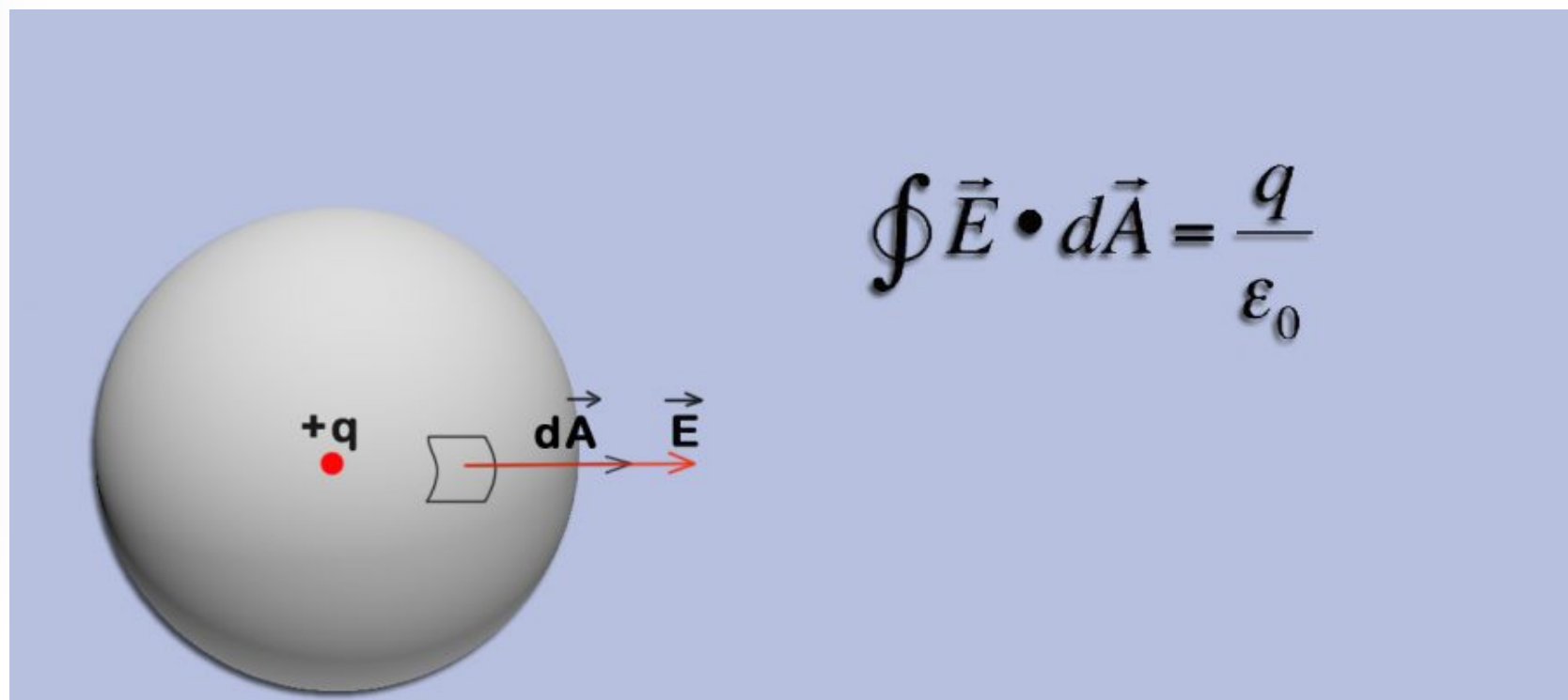


# قانون گاوس

$$\epsilon_0 \Phi = q_{\text{enc}} \quad (\text{Gauss' law}).$$

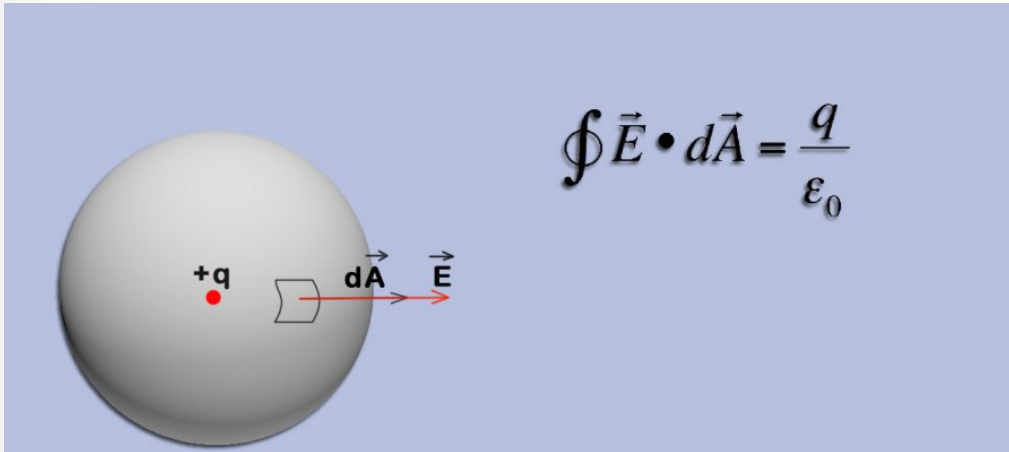
در استفاده از قانون گاوس باید به نکات زیر توجه کرد:

- (۱) در صورت محاسبه شار عبوری از یک سطح بسته، می توان بار داخل را محاسبه نمود.
- (۲) اگر بار داخل سطح بسته مشخص باشد می توان شار سطح بسته را محاسبه نمود.
- (۳) اگر شار روی سطح مشخص باشد می توان میدان الکتریکی را روی سطح محاسبه نمود.



# هم ارزی قانون گاوس و قانون کولن

$$\epsilon_0 \Phi = q_{\text{enc}} \quad (\text{Gauss' law}).$$



$$\varphi_{\text{کل}} = \frac{q_{\text{in}}}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\varphi_{\text{کل}} = ES = E(4\pi r^2)$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} * \frac{q}{r^2}$$

$$E = k \frac{q}{r^2}$$

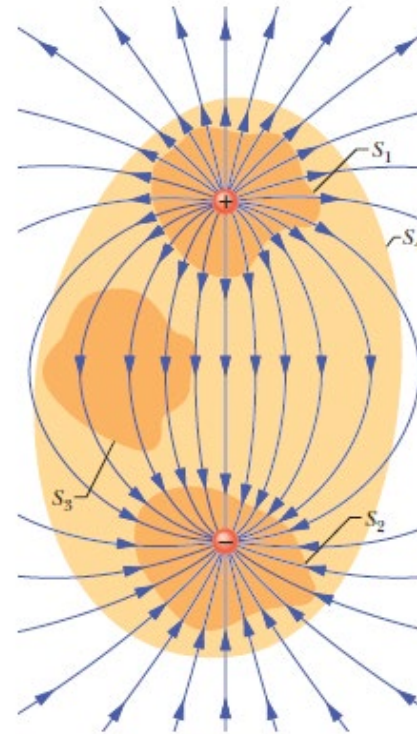
$$F = q_0 E$$

$$F = k \frac{q q_0}{r^2}$$

در صورتی که روی کره بار  $q_0$  قرار دهیم تحت میدان بالا نیروی زیر به آن وارد می شود. داریم:

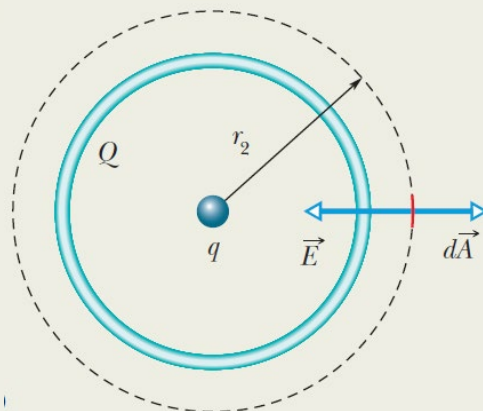
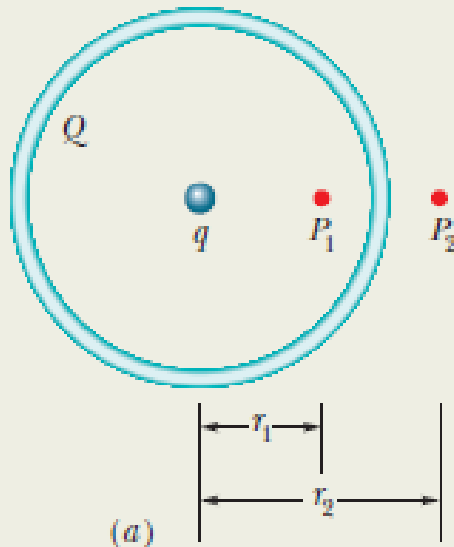
## شار و بار خالص

$$\epsilon_0 \Phi = q_{\text{enc}} \quad (\text{Gauss' law}).$$



# قانون گاوس

مثال



$$Q = -16e$$

$$R = 10 \text{ cm.}$$

$$q = +5e$$

$$\epsilon_0 \Phi = q_{\text{enc}} \quad (\text{Gauss' law}).$$

$$\epsilon_0 E 4\pi r^2 = q_{\text{enc}}.$$

$$E = \frac{-q_{\text{enc}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

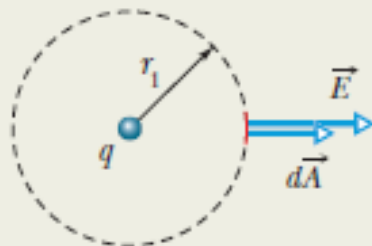
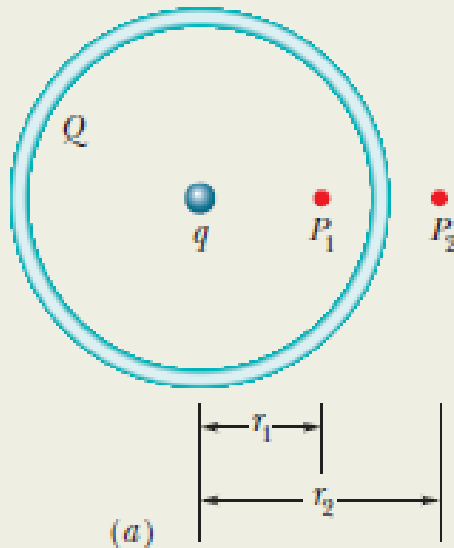
$$= \frac{-[-11(1.60 \times 10^{-19} \text{ C})]}{4\pi(8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)(0.120 \text{ m})^2}$$

$$= 1.10 \times 10^{-6} \text{ N/C.}$$

(Answer)



# قانون گاوس



$$Q = -16e$$

$$R = 10 \text{ cm.}$$

$$q = +5e$$

$$\epsilon_0 \Phi = q_{\text{enc}} \quad (\text{Gauss' law}).$$

$$\epsilon_0 E 4\pi r^2 = q_{\text{enc}}.$$

$$E = \frac{q_{\text{enc}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

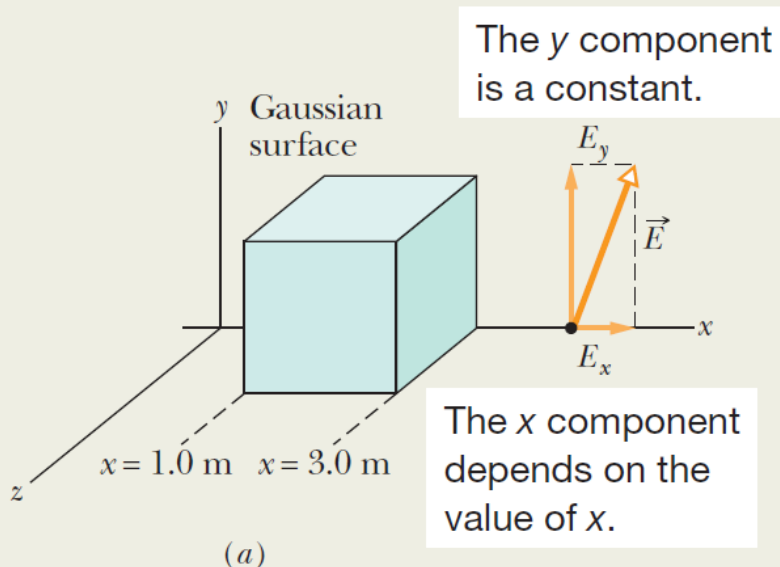
$$= \frac{5(1.60 \times 10^{-19} \text{ C})}{4\pi(8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)(0.0600 \text{ m})^2}$$

$$= 2.00 \times 10^{-6} \text{ N/C.}$$

(Answer)

# شار الكترىكى

مثال



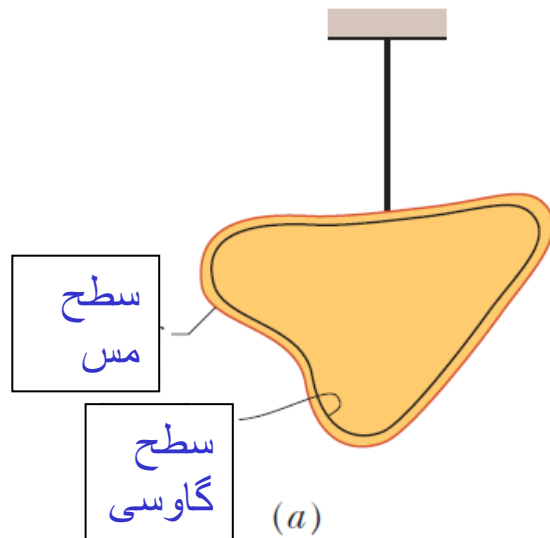
$$\vec{E} = 3.0x\hat{i} + 4.0\hat{j}$$

$$\Phi_r = (9.0 \text{ N/C})(4.0 \text{ m}^2) = 36 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}.$$

$$\epsilon_0 \Phi = q_{\text{enc}} \quad (\text{Gauss' law}).$$

# رسانای باردار منزوی

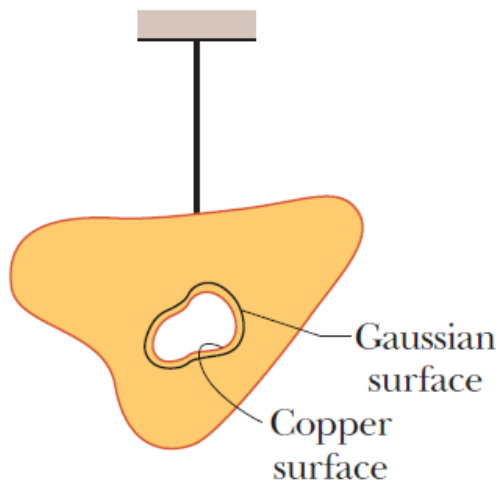
اگر یک بار اضافی روی سطح رسانایی منظوی قرار داده شود. آن مقدار بار به طور کامل روی سطح رسانا حرکت خواهد کرد و هیچگونه بار اضافی در داخل جسم رسانا وجود نخواهد داشت.



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

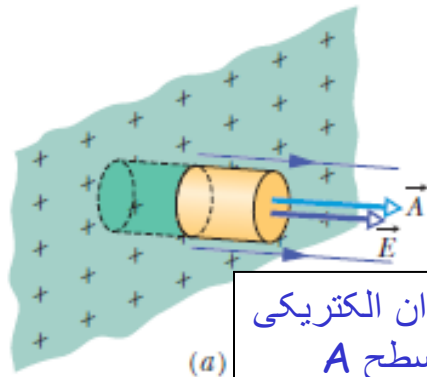
# رسانای باردار منزوی

همه بار اضافی روی سطح خارجی رسانا



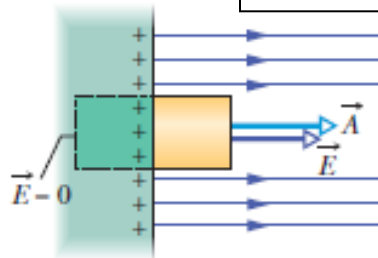
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

# میدان الکتریکی درست در بیرون سطح رسانا و نارسانا



(a)

شار میدان الکتریکی  
تنها از سطح  $A$



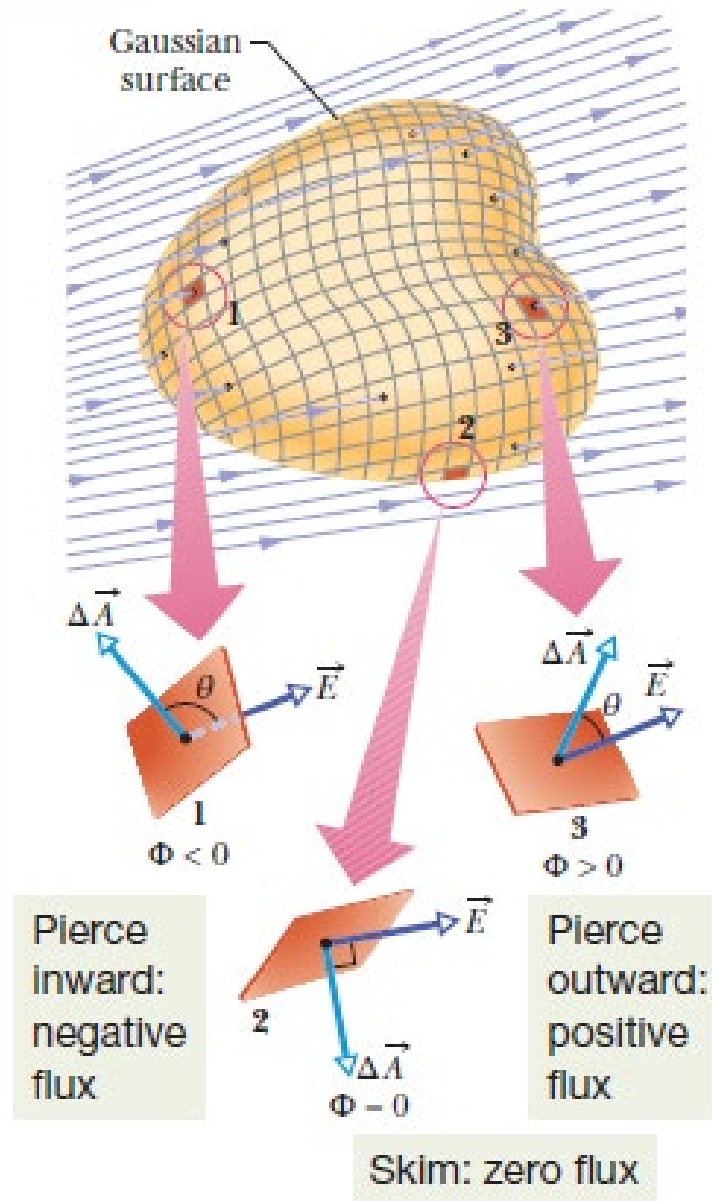
(b)

$$\underbrace{\oint \vec{E} \cdot d\vec{A}}_{EA} = \frac{q}{\epsilon_0} \rightarrow \sigma A$$

$$\epsilon_0 EA = \sigma A,$$

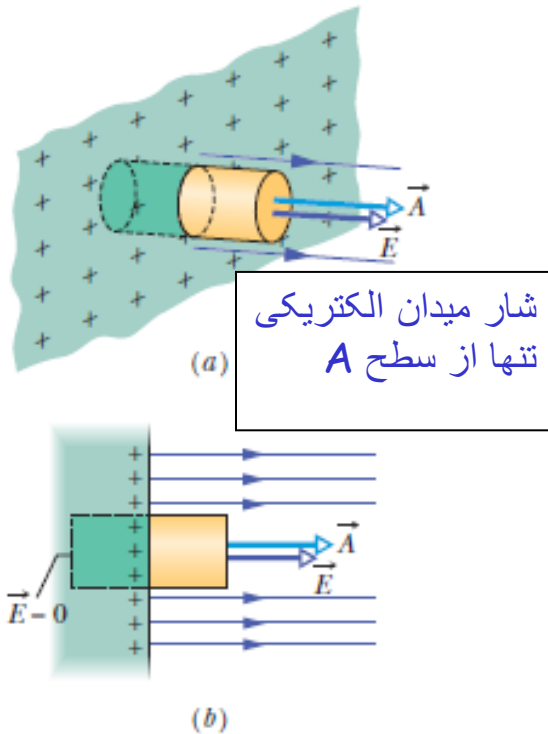
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

# میدان الکتریکی درست در بیرون سطح رسانا



$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

# میدان الکتریکی درست در بیرون سطح نارسانای

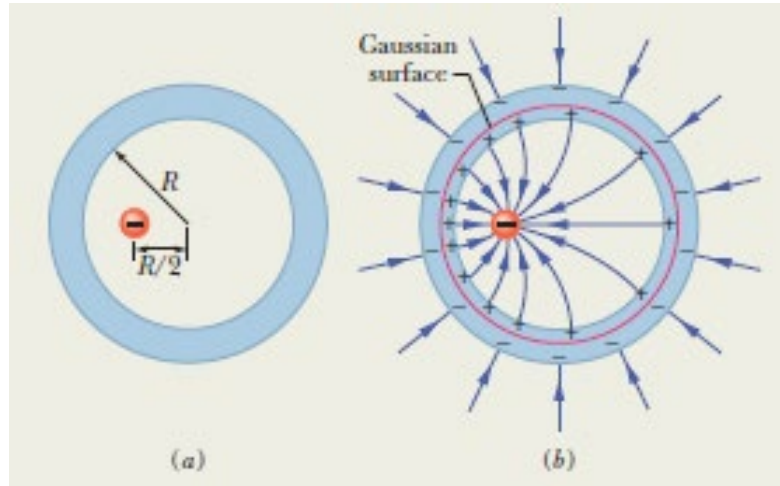


$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{\text{enc}},$$

$$\epsilon_0(EA + EA) = \sigma A,$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

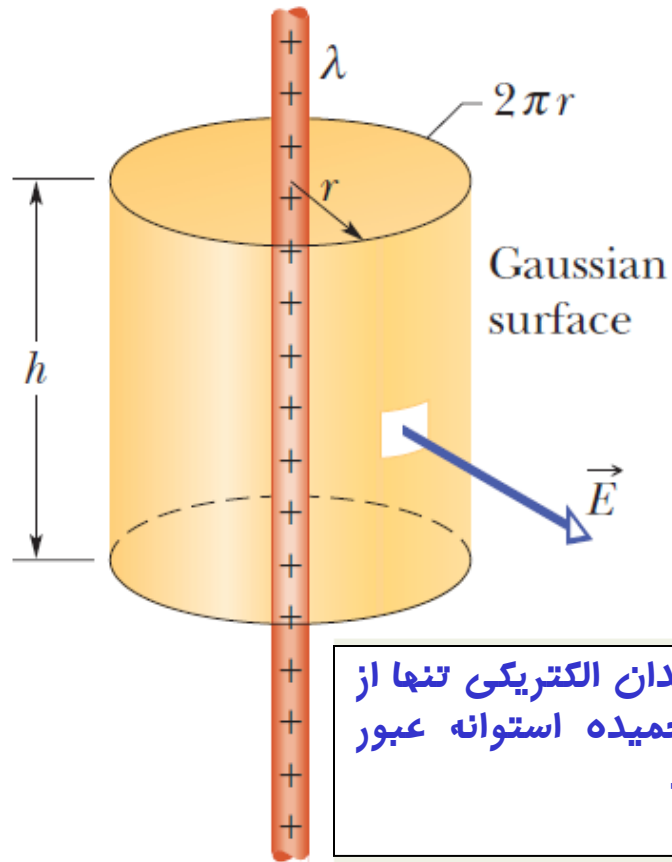
## میدان الکتریکی درست در بیرون سطح نارسانای



شکل سطح مقطعی از یک پوسته فلزی کروی با شعاع داخلی  $R$  را نشان می‌دهد. بار نقطه‌ای  $-5 \mu\text{C}$  در فاصله  $R/2$  از مرکز پوسته قرار گرفته است. اگر پوسته از لحاظ الکتریکی خنثی باشد، بارهای القا شده روی سطح‌های داخلی و خارجی آن چقدر است؟ آیا این بارها به طور یکنواخت توزیع شده‌اند؟



# کاربرد قانون گاوس (تقارن استوانه‌ای)

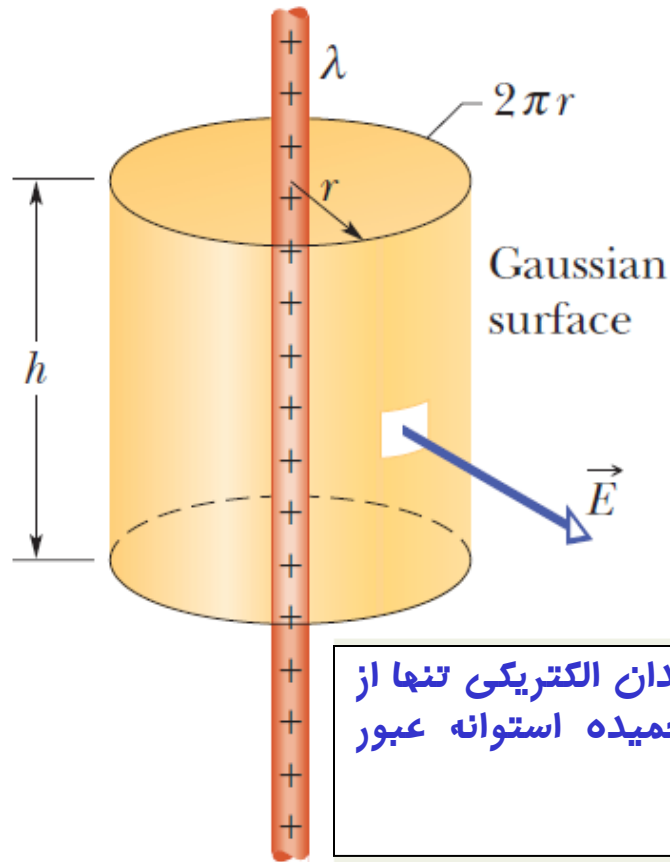


میله باردار استوانه‌ای بسیار  
بلند با بار یکنواخت

شار میدان الکتریکی تنها از  
سطح خمیده استوانه عبور  
می‌کند



# کاربرد قانون گاوس (تقارن استوانه‌ای)



$$\Phi = EA \cos \theta = E(2\pi rh) \cos 0 = E(2\pi rh).$$

$$\begin{aligned}\epsilon_0 \Phi &= q_{\text{enc}}, \\ \epsilon_0 E(2\pi rh) &= \lambda h,\end{aligned}$$

شار میدان الکتریکی تنها از  
سطح خمیده استوانه عبور  
می‌کند

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

